Volumen 1, Número 2 (2007), pp. 134-147 www.csf.itesm.mx/egade/publicaciones

REVISTA DE ADMINISTRACIÓN, FINANZAS Y ECONOMÍA

Recibido 12 de abril 2007, Aceptado 7 de junio 2007

# Control óptimo estocástico en una economía bajo riesgo e incertidumbre

**Francisco Venegas-Martínez***
**Roberto Ballinez-Ambriz****

**Resumen**

En este trabajo se desarrolla un modelo de control óptimo estocástico para una economía cerrada con tres sectores: consumidores, empresas y gobierno. Las variables aleatorias que conducen la dinámica estocástica de las variables económicas y financieras relevantes siguen procesos de Wiener o movimientos Brownianos. Con base en el modelo propuesto se analizan diferentes aspectos de política monetaria y fiscal y se discuten varias relaciones de equilibrio; como acumulación de capital e inflacion.

**Abstract**

The aim of this paper is to develop a stochastic optimal control model for a closed economy with three sectors: consumers, firms and government. The random variables that drive the stochastic dynamics of relevant economic and financial variables follow a Wiener process or Brownian motion. On the basis of the proposed model, several aspects of monetary and fiscal policy are analyzed and various equilibrium relations, such as capital accumulation and inflation, are discussed.

*Clasificación JEL: C61, E22, E52, E62*

*Palabras clave: Análisis dinámico, Política monetaria y fiscal, Crecimiento económico e inversión, Riesgo inflacionario*

## 1. Introducción

La independencia del banco central ha sido uno de los principales mecanismos para reducir la inflación y dar efectividad a la política monetaria, ya que al separar del gobierno la facultad de emitir dinero, se limita la posibilidad de que

* Investigador ESE-IPN.

** Alumno del doctorado en Ciencias Financieras Tecnológico de Monterrey Campus Ciudad de México.

éste financie su gasto por esa vía y genere procesos inflacionarios. Así, las fluctuaciones esperadas en torno de la política monetaria son mínimas, generando un ambiente donde el componente estocástico de la inflación se reduce considerablemente. En sentido estricto, esto no significa que desaparezca el riesgo, lo que significa es que se reduce la varianza de algunos de los determinantes de la inflación.

La discusión sobre el diseño de la estrategia de política económica, así como los instrumentos y mecanismos para desarrollarla, se ha ubicado recientemente en un marco de referencia más amplio que incorpora el riesgo y la incertidumbre. La estrategia de política económica siempre combina instrumentos de política monetaria (crecimiento de la base monetaria, tasa de interés y regulación bancaria) con instrumentos de política fiscal (gasto público e impuestos), y una pregunta relevante es cuál de estos instrumentos genera mayor varianza en la estrategia general.

La globalización en los mercados, así como la creación de regiones de libre comercio e instituciones internacionales como FMI, Banco Mundial, etc., han redefinido las reglas y restricciones del desarrollo económico para muchos países. En estas condiciones, las estrategias a seguir para estabilizar una economía no sólo dependen de la incertidumbre interna, sino también de la incertidumbre internacional, ya que la eficacia de los instrumentos de política económica está en función de las relaciones con el exterior, vía tipo de cambio, flujo de capitales y tasas de interés. En síntesis, las condiciones actuales de una economía globalizada plantean la necesidad de marcos teóricos más sofisticados, capaces de incorporar no sólo las relaciones básicas del funcionamiento interno de la economía, sino también la incertidumbre en el comportamiento de agentes complejos que responden a factores externos de riesgo.

En este trabajo se retoman todas las ideas expuestas anteriormente con el objetivo de desarrollar un modelo de control óptimo estocástico para una economía cerrada. Para ello se consideran tres sectores: consumidores, empresas y gobierno. Por razones técnicas, el modelo se plantea para una economía cerrada, ya que el hecho de abrirla impone serias complicaciones en el proceso de optimización. Para efectos de modelación las variables principales evolucionan de acuerdo a procesos markovianos de difusión de la forma:

$$\mathrm{d}x = \mu x \mathrm{d}t + \sigma x \mathrm{d}z;$$

donde $\mu$ y $\sigma$ representan la media y varianza de la variable $x$ (véanse, por ejemplo, Turnovsky (1999), Giulano y Turnovsky (2003), y Turnovsky y Smith (2006)). Las perturbaciones aleatorias se incorporan en el factor $\mathrm{d}z$, donde $z$ sigue un proceso de Wiener o movimiento Browniano. Con base en este patrón el modelo incorpora elementos estocásticos a la toma de decisiones de los agentes, además de considerar de manera específica el efecto de la incertumbre fiscal y monetaria y, consecuentemente, sobre las decisiones óptimas de los agentes. Al mismo tiempo, aporta un marco más amplio y más rico para el análisis de los intrumentos de política económica. El marco de referencia es similar al de Turnovsky (1993) y Venegas-Martínez (2001), (2005), (2006a), (2006b), (2006c) y (2008), en donde se supone una economía cerrada con las siguientes características:

a) Presencia de agentes representativos (consumidores maximizadores de utilidad y empresas maximizadoras de beneficios).
b) Todos los procesos estocásticos que modelan los riesgos a los que se exponen los agentes son generados por movimientos Brownianos.
c) Las medias y varianzas de los procesos estocásticos en cuestión están relacionadas.

El trabajo está organizado en cinco secciones las cuales presentan una descripción de la economía, los sectores que la integran, los problemas objetivo de cada uno de los agentes y sus soluciones óptimas, así como las relaciones de equilibrio general. Asimismo, se presentan las conclusiones junto con las limitaciones del modelo propuesto y algunas sugerencias para futuras investigaciones.

## 2. Consumidores

En este modelo el consumidor representativo tiene un horizonte de vida infinito y maximiza su utilidad total descontada a una tasa intertemporal subjetiva $\delta$. El consumidor obtiene utilidad del consumo de un bien genérico y de la tenencia de saldos reales. A partir de estas consideraciones, los elementos que definen el problema de maximización del agente representativo, son:

a) *Restricción presupuestal.* El consumidor posee tres activos: dinero, $M$, bonos de gobierno, $B$, y acciones, $S$; sujeto a la restricción presupuestal

$$\frac{M}{P} + \frac{B}{P} + S = W, \tag{1}$$

donde $M/P$ y $B/P$ indican los acervos reales de dinero y bonos de gobierno, mientras $S$ es el acervo real de acciones. La riqueza real del individuo es denotada por $W$.

b) *Utilidad Esperada.* Dado que el consumidor obtiene satisfacción del bien de consumo, $C$, y la tenencia de saldos reales, $M/P$, el objetivo es elegir el portafolio y la cantidad de consumo que maximicen

$$\mathrm{E}_0\left[\int_0^\infty U\left(C, \frac{M}{P}\right) e^{-\delta t}\mathrm{d}t \;\middle|\; \mathcal{F}_0\right], \tag{2$a$}$$

donde $\mathrm{E}_0$ es la esperanza condicional a la información disponible, $\mathcal{F}_0$, al tiempo $t = 0$, y $U$ es el índice de felicidad. Por otra parte, la evolución de la riqueza sigue la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}W = W\left(\theta_1 \mathrm{d}R_M + \theta_2 \mathrm{d}R_B + \theta_3 \mathrm{d}R_S\right) - C\mathrm{d}t - \mathrm{d}T, \tag{2$b$}$$

donde

$\theta_1 \equiv (M/P)/W$ : porcentaje del portafolio en saldos reales,

$\theta_2 \equiv (B/P)/W$ : porcentaje del portafolio en bonos de gobierno, en términos reales,

$\theta_3 \equiv S/W$ : porcentaje del portafolio en acciones,

$\mathrm{d}R_i$ = tasa de rendimiento real después de impuesto sobre el activo $i$, $i = M, B, S$,

$\mathrm{d}T$ = impuestos sobre riqueza.

c) *Rendimiento de los activos.* Se supone que las tasas nominales de rendimiento del dinero y de los bonos son cero e $i$, respectivamente. Asimismo, se supone que el consumidor percibe que los precios evolucionan estocásticamente de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = \pi \mathrm{d}t + \mathrm{d}p, \tag{3}$$

donde $\pi dt$ es la media esperada de la inflación en el periodo $\mathrm{d}t$ y $\mathrm{d}p$ es un factor estocástico que se distribuye normalmente con media cero y varianza $\sigma_p^2 \mathrm{d}t$. A partir de esta ecuación y empleando el lema de Itô, se obtienen las tasas de rendimiento del dinero y de los bonos de gobierno:

*i)* Para obtener $dR_M$ se calcula

$$\mathrm{d}R_M = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{M}{P}\right)}{\frac{M}{P}} = r_M \mathrm{d}t - \mathrm{d}p, \tag{4a}$$

donde

$$r_M = -\pi + \sigma_p^2.$$

*ii)* De manera similar, para obtener $dR_B$ se calcula

$$\mathrm{d}R_B = \frac{\mathrm{d}(P^{-1})}{P^{-1}} = r_B \mathrm{d}t - \mathrm{d}p, \tag{4b}$$

donde

$$r_B = i(1 - \tau_y) - \pi + \sigma_p^2,$$

aquí $\tau_y$ es la tasa de impuesto sobre ingresos por intereses ganados. Es importante observar que los rendimientos del dinero y de los bonos se ven afectados con la varianza de la tasa de inflación.

*iii)* La tasa de rendimiento de las acciones, después de impuesto, está dada por

$$\mathrm{d}R_S = r_S \mathrm{d}t + \mathrm{d}u, \tag{4c}$$

donde $\mathrm{d}u$, al igual que $\mathrm{d}p$, es una variable aleatoria, temporalmente independiente, que tiene una distribución normal con media cero y varianza $\sigma_u^2 dt$. La tasa de rendimiento media esperada $r_S$ se especifica posteriormente cuando se estudie a la empresa.

d) *Impuestos.* Además de los impuestos $\tau_y$ y $\tau_c$ que se pagan sobre los ingresos por intereses y ganancias de capital, respectivamente, el consumidor paga un impuesto sobre la riqueza de la forma

$$\mathrm{d}T = \tau W \,\mathrm{d}t + W \,\mathrm{d}v, \tag{5}$$

y al igual que en los casos anteriores, $\mathrm{d}v$ es una perturbación estocástica, que se distribuye normalmente con media cero y varianza $\sigma_v^2 \mathrm{d}t$.

Si se sustituyen $\theta_1$ en (2a), y (4a), (4b), (4c) y (5) en (2b), y se supone que la función de utilidad del consumidor es de la forma

$$U = \beta \log C + \gamma \log \frac{M}{P}, \qquad \beta + \gamma = 1,$$

el problema de optimización del consumidor consiste en elegir $C$, $\theta_1$, $\theta_2$ y $\theta_3$ que maximicen

$$\text{Maximizar} \;\; \mathrm{E}_0 \left[ \int_0^{\infty} [\beta \log C + \gamma \log(\theta_1 W)] e^{-\delta t} \mathrm{d}t \;\middle|\; \mathcal{F}_0 \right] \tag{6$a$}$$

sujeto a:

$$\frac{\mathrm{d}W}{W} = \left( \theta_1 r_M + \theta_2 r_B + \theta_3 r_S - \frac{C}{W} - \tau \right) + [-(\theta_1 + \theta_2)\mathrm{d}p + \theta_3 \mathrm{d}u - \mathrm{d}v] \tag{6$b$}$$

y

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1, \tag{6$c$}$$

donde $i$, $\pi$, $\tau_y$, $\tau_c$, $\tau$, y las varianzas y covarianzas correspondientes se toman como dadas. Para resolver este problema se utiliza la ecuación de Jacobi-Hamilton-Bellman

$$0 = \max_{C,\theta_1,\theta_2,\theta_3} \Bigg\{ \beta \log C + \gamma \log(\theta_1 W) - \delta V(W)$$

$$+ W V'(W) \left[ \theta_1(-\pi + \sigma_p^2) + \theta_2(i(1-\tau_y) - \pi - \sigma_p^2) + \theta_3 r_S - \frac{C}{W} - \tau \right]$$

$$+ \tfrac{1}{2} W^2 V''(W) \big[ (\theta_1 + \theta_2)^2 \sigma_p^2 + \theta_3^2 \sigma_u^2 + W^2 \sigma_v^2 - 2(\theta_1 + \theta_2)\theta_3 \sigma_{pu}$$

$$+ 2(\theta_1 + \theta_2)\sigma_{pv} W - 2\theta_3 W \sigma_{uv} \big] \Bigg\}$$

sujeta a

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$$

Para ello, se utiliza el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \{*\} + \lambda(1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3),$$

donde $*$ representa la ecuación de Jacobi-Hamilton-Bellman, definida arriba. Las condiciones de primer orden (o condiciones necesarias) en este caso son

son: $\partial\mathcal{L}/\partial C = 0$; $\partial\mathcal{L}/\partial\theta_i = 0$, $i = 1, 2, 3$; y $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda = 0$. Equivalentemente,

$$\frac{\beta}{C} = V'(W), \tag{7a}$$

$$\frac{\gamma}{\theta_1} + WV'(W)(-\pi + \sigma_p^2) + W^2V''(W)[(\theta_1 + \theta_2)\sigma_p^2 - \theta_3\sigma_{pu} + \sigma_{pv}] - \lambda = 0, \tag{7b}$$

$$WV'(W)(i(1-\tau_y) - \pi - \sigma_p^2) + W^2V''(W)[(\theta_1 + \theta_2)\sigma_p^2 - \theta_3\sigma_{pu} + \sigma_{pv}] - \lambda = 0, \tag{7c}$$

$$WV'(W)r_S + W^2V''(W)[\theta_3\sigma_u^2 - (\theta_1 + \theta_2)\sigma_{pu} - \sigma_{uv}] - \lambda = 0, \tag{7d}$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1. \tag{7e}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, se supone que $V(W)$ es de la forma: $V(W) = b_0 + b_1 \log(W)$. Consecuentemente, las dos primeras derivadas de $V(W)$ son:

$$V'(W) = \frac{b_1}{W}$$

y

$$V''(W) = -\frac{b_1}{W^2}.$$

Si se sustituyen las dos expresiones anteriores en las condiciones de primer orden y se elimina $\lambda$ el sistema de ecuaciones (7a)-(7e) se simplifica considerablemente. En efecto, a partir de (7a) se obtiene

$$\frac{\beta}{C} = \frac{b_1}{W},$$

de donde

$$C = \frac{\beta W}{b_1}.$$

Asimismo, de (7b) y (7c), se sigue que

$$\frac{\gamma}{\theta_1} = i(1-\tau_y)b_1,$$

lo que implica que

$$\theta_1 = \frac{\gamma}{i(1-\tau_y)b_1}.$$

También, a partir de (7c) y (7d), y recordando que $r_B = i(1-\tau_y) - \pi - \sigma_p^2$, se obtiene

$$\theta_3 = \frac{(r_S - r_B) + \sigma_p^2 + \sigma_{pu} + \sigma_{pv} + \sigma_{uv}}{\sigma_p^2 + \sigma_u^2 + 2\sigma_{pu}}.$$

Por último, $\theta_2$ se obtiene al despejarla de $1 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$. Ahora bien, para que $V(W)$ sea solución, se debe cumplir que $b_1 = \frac{1}{\delta}$, por lo que las decisiones óptimas de consumo e integración del portafolio de activos del consumidor están dadas por:

$$C = \delta\beta W, \tag{8a}$$

$$\theta_1 = \frac{\delta\gamma}{i(1-\tau_y)}, \tag{8b}$$

$$\theta_2 = 1 - \frac{\delta\gamma}{i(1-\tau_y)} - \frac{(r_S - r_B) + \sigma_p^2 + \sigma_{pu} + \sigma_{pv} + \sigma_{uv}}{\sigma_p^2 + \sigma_u^2 + 2\sigma_{pu}}, \tag{8c}$$

$$\theta_3 = \frac{(r_S - r_B) + \sigma_p^2 + \sigma_{pu} + \sigma_{pv} + \sigma_{uv}}{\sigma_p^2 + \sigma_u^2 + 2\sigma_{pu}}. \tag{8d}$$

## 3. Empresas

En esta economía, la empresa representativa produce el único bien que hay en el mercado. Por otro lado, los rendimientos que paga sobre las acciones emitidas está en función de la producción y de la política de dividendos. De esta forma, los elementos que definen el comportamiento de la empresa son:

a) *Tecnología.* En esta economía la producción sigue una trayectoría definida por:

$$\mathrm{d}Y = \nu K\,\mathrm{d}t + \nu K\,\mathrm{d}y, \tag{9}$$

donde $\nu$ representa el producto marginal del capital. Aquí, como en el caso del consumidor, $\mathrm{d}y$ sigue un proceso Winer o movimiento Browniano que se distribuye normalmente con media cero y varianza $\sigma_y^2\mathrm{d}t$.

b) *Rendimiento sobre acciones.* En términos generales, el rendimiento que paga la empresa sobre las acciones emitidas se puede definir como:

$$\mathrm{d}R_S = (1-\tau_y)\frac{\mathrm{d}D}{S} + (1-\tau_c)\frac{\mathrm{d}s}{s}, \tag{10}$$

donde:

$\mathrm{d}D$ = flujo de dividendos,

$s$ = precio relativo de las acciones, en términos de producto,

$\tau_c$ = impuestos pagados sobre ganancias de capital.

De esta forma, el rendimiento de las acciones tiene dos componentes: los dividendos que se pagan por acción y las ganancias (o pérdidas) de capital que resultan de movimientos en el precio de las acciones al final del periodo. Se analizan cada uno por separado.

c) *Ganancias o pérdidas de capital.* Para conocer la trayectoria que sigue $\mathrm{d}s/s$, es necesario analizar el comportamiento de la producción, el stock de acciones, el capital y la política de inversión de la empresa. Así, en el equilibrio el stock de acciones es igual al stock de capital existente, por lo que $S = K$. Ahora bien, si se denota como $N$ el stock de acciones en cualquier tiempo $t$, se debe cumplir que:

$$sN = K = S, \tag{11}$$

lo que representa el valor monetario de las acciones emitidas, el capital y el stock de acciones en poder de los consumidores. Si se deriva $sN = K$ siguiendo el lema de Itô, se obtiene:

$$\mathrm{d}K = N\mathrm{d}s + (s + \mathrm{d}s)\mathrm{d}N, \tag{12}$$

es decir, el capital sigue una trayectoria definida por el nivel de acciones en cada momento y los cambios en el precio de éstas. Por otra parte, la producción neta después de impuestos puede tener dos usos: para pagar dividendos o para financiar nueva inversión, $RE$, entendida como ampliación de la capacidad de planta. De esta forma, la trayectoria que sigue el producto después de impuestos es:

$$(1 - \tau_p)\mathrm{d}Y = \mathrm{d}D + \mathrm{d}RE, \tag{13}$$

donde $\tau_p$ es el impuesto sobre ingresos corporativos. Ahora, dado que las empresas pueden financiar nuevo capital emitiendo acciones o reteniendo ganancias, la acumulación de capital enfrenta la restricción:

$$\mathrm{d}K = (s + ds)\mathrm{d}N + \mathrm{d}RE, \tag{14}$$

lo cual indica que el valor del nuevo capital está en función de las ganacias retenidas y del valor de las nuevas acciones que se venden al precio $s + \mathrm{d}s$. De esta forma, si se sustituyen las ecuaciones (11), (12) y (13) en (14) y se despeja $\mathrm{d}s/s$, se obtiene:

$$\frac{\mathrm{d}s}{s} = \frac{(1 - \tau_p)dY - dD}{s}. \tag{15}$$

Si la ecuación anterior se sustituye en la expresión del rendimiento de las acciones (10), se sigue que

$$\mathrm{d}R_S = (\tau_c - \tau_y)\frac{\mathrm{d}D}{S} + (1 - \tau_p)\frac{\mathrm{d}Y}{S}. \tag{16}$$

d) *Política de dividendos y rendimiento del capital.* En este modelo, asumimos que los dividendos que pagan las empresas son una fracción $w$ del ingreso corporativo después de impuestos. Es decir, los dividendos adquieren la forma

$$\mathrm{d}D = w(1 - \tau_p)\mathrm{d}Y, \qquad 0 \le w \le 1. \tag{17}$$

De esta forma, si se sustituye esta expresión en la ecuación (16) y se recuerda que en el equilibrio $K = S$, se obtiene la trayectoria estocástica del rendimiento de las acciones en términos del proceso de difusión que siguen el producto y el stock de capital:

$$\mathrm{d}R_S = [1 - \tau_c + w(\tau_c - \tau_y)](1 - \tau_p)\frac{\mathrm{d}Y}{K}, \tag{18}$$

Es importante observar en la ecuación anterior que el componente estocástico está dado por $dY$, ya que el resto de las variables son deterministas. De manera similar, si se sustituyen (16) en (13), se obtiene la trayectoria estocástica que siguen las ganancias (o pérdidas de capital) en términos de $\mathrm{d}Y$ y $K$:

$$\frac{\mathrm{d}s}{s} = (1 - w)(1 - \tau_p)\frac{\mathrm{d}Y}{K}.$$

Como puede observarse, el rendimiento de las acciones varía directamente con $w$, a diferencia de la tasa de ganacias de capital, que lo hace de forma inversa. Por último, si se toma en cuenta que en la ecuación (4c) el cambio marginal $\mathrm{d}R_S$ está en términos de $r_S$ y $\mathrm{d}u$, y se desea obtener una expresión similar, entonces se sustituye (9) en (18). Ahora bien, si se define $\tau_k$ como el impuesto promedio que pagan los consumidores por ingresos de dividendos y ganancias de capital, ponderados con $w$ de la forma $\tau_k = w\tau_y + (1-w)\tau_c$, y si también se sustituye esta expresión en (18), se obtiene que:

$$r_S = (1 - \tau_k)(1 - \tau_p)\nu, \tag{19$a$}$$

$$\mathrm{d}u = (1 - \tau_k)(1 - \tau_p)\nu\mathrm{d}y. \tag{19$b$}$$

De esta forma, la tasa de rendimiento de las acciones está en función de la tasa del producto marginal del capital; y de manera similar, el componente estocástico $\mathrm{d}u$ depende de los shocks de productividad derivados de cambios en $\nu$.

## 4. Gobierno

En virtud de que el gobierno tiene el monopolio de emisión de dinero y, a la vez, emite deuda para financiar su gasto, es necesario analizar los tres principales instrumentos de política que emplea: política de gasto, política monetaria y política de deuda; además de la restricción presupuestal que enfrenta y los ingresos derivados de la recaudación de impuestos.

a) *Restricción presupuestal.* De manera similar al caso del consumidor, la restricción presupuestal del gobierno, expresada en función del déficit financiero en términos reales, tiene la forma:

$$\mathrm{d}G - \mathrm{d}T_h - \mathrm{d}T_f + \frac{M}{P}\mathrm{d}R_M + \frac{B}{P}\mathrm{d}R_B = \mathrm{d}\left(\frac{M}{P}\right) + \mathrm{d}\left(\frac{B}{P}\right) \tag{20}$$

donde:
$\mathrm{d}G$ = gasto real del gobierno,
$\mathrm{d}T_h$ = impuesto total recaudado de los consumidores, en términos reales,

$\mathrm{d}T_f$ = impuesto total recaudado de las empresas, en términos reales.

b) *Política de gasto.* En este modelo el gasto que realiza el gobierno sigue una trayectoria estocástica definida por:

$$\mathrm{d}G = g\nu K\,\mathrm{d}t + \nu K\,\mathrm{d}z, \tag{21$a$}$$

donde, al igual que en los casos anteriores, $dz$ es una variable estocástica con una distribución normal con media cero y varianza $\sigma_z^2 dt$. De esta forma, el gasto de gobierno está definido como una fracción $g$ del producto real. El factor estocástico del gasto, en cambio, es proporcional al producto.

c) *Política monetaria.* En esta economía, la regla de crecimiento de la oferta monetaria sigue un proceso estocástico de difusión de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}M}{M} = \mu\mathrm{d}t + \mathrm{d}x, \tag{21$b$}$$

donde $\mu$ es la tasa nominal de crecimiento monetario y $\mathrm{d}x$ es el componente estocástico con distribución normal con media cero y varianza $\sigma_x^2\mathrm{d}t$.

d) *Política de deuda.* La deuda que contrata el gobierno se hace vía emisión de bonos. En este caso, la política de endeudamiento se fija de forma tal que el cociente del stock de bonos entre el stock monetario, se mantenga constante a una tasa $\lambda$, que se fija de manera exógena, es decir:

$$\frac{B}{M} = \lambda, \tag{21$c$}$$

esta relación resulta de definir el stock de bonos como una proporción fija del stock de dinero: $B = \lambda M$. De esta forma, diferenciando totalmente la ecuación (21c), se tiene la expresión

$$\frac{\mathrm{d}B}{B} = \frac{\mathrm{d}M}{M},$$

lo que indica que ambos stocks crecen a la misma tasa. Por lo tanto, el único recurso para cambiar $\lambda$ es vía operaciones de mercado abierto en función de $\mathrm{d}B = -\lambda\mathrm{d}M$. Por lo tanto, si $\lambda = 1$, la cantidad de deuda emitida, es igual a la cantidad de dinero que se saca de circulación de la economía; o inversamente, la cantidad que crece la oferta monetaria es igual a la deuda gubernamental que se salda.

e) *Recaudación de impuestos.* Finalmente, las cantidades reales de la recaudación total del gobierno, $\mathrm{d}T_h$ y $\mathrm{d}T_f$ que se aplican a consumidores y empresas, están definidas por:

   *i)* En el caso de los consumidores, el impuesto total tiene tres componentes: el gravado sobre los intereses que reciben por la tenencia de bonos, el de las ganacias de capital y el que se hace sobre el nivel de riqueza (5). De esta forma, las cantidas respectivas son:

$$\mathrm{d}T_h^i = i\tau_y\theta_2 W\,\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}T_h^c = \tau_k(1-\tau_p)\nu K(\mathrm{d}t + \mathrm{d}y),$$
$$\mathrm{d}T = \tau W\,\mathrm{d}t + W\,\mathrm{d}v.$$

En consecuencia,

$$\mathrm{d}T_h = \mathrm{d}T_h^i + \mathrm{d}T_h^c + \mathrm{d}T.$$

*ii)* En el caso de las empresas, los impuestos se gravan sobre los ingresos corporativos. Es decir,

$$\mathrm{d}T_f = \tau_p\mathrm{d}Y = \tau_p\nu K(\mathrm{d}t + \mathrm{d}y),$$

donde las tasas $\tau_y$, $\tau_c$ y $\tau_p$ son exógenamente determinadas.

## 5. Relaciones de equilibrio

Para encontrar la trayectoria que sigue la acumulación de capital en esta economía, $\mathrm{d}K/K$, se parte de la identidad de la renta nacional, la cual garantiza el equilibrio en el mercado de bienes:

$$\mathrm{d}K = \mathrm{d}Y - \mathrm{d}C - \mathrm{d}G. \tag{22}$$

Si se sustituyen en el la expresión anterior las ecuaciones (7a), (9) y (21a) que corresponden a las trayectorias del consumo, la producción y el gasto de gobierno, respectivamente, se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}K}{K} = \left[\nu(1-g) - \frac{\beta\delta}{\theta_3}\right]\mathrm{d}t + \nu(\mathrm{d}y - \mathrm{d}z). \tag{23}$$

De esta forma, la acumulación de capital sigue una trayectoria estocástica determinada por la producción, el consumo y el gasto de gobierno. Consecuentemente, el componente no estocástico de esta ecuación, $\mathrm{E}[\mathrm{d}K/K]$, está determinado por

$$\phi = \nu(1-g) - \frac{\beta\delta}{\theta_3}, \tag{24$a$}$$

mientras que el componente estocástico, d$k$, se deriva de

$$\nu(\mathrm{d}y - \mathrm{d}z), \tag{24$b$}$$

donde d$y$ y d$z$ son los movimientos Brownianos respectivos a la producción y al gasto de gobierno.

Una vez especificadas las ecuaciones que modelan las decisiones óptimas de los agentes, así como las variables endógenas y exógenas, lo que resta es obtener algunas relaciones de equilibrio. Ahora, dado que en esta economía el stock de capital y las cantidades nominales de bonos y dinero se heredan del pasado, y dado que el stock real de dinero y bonos están determinados por los movimientos en el nivel de precios, es necesario, en primera instancia, especificar el comportamiento que sigue la inflación. Para ello, se parte de las relaciones del equilibrio del portafolio de activos, derivadas en el apartado del consumidor.

A partir de las condiciones de primer orden del consumidor (7a) a (7e), se puede ver que si los activos tienen las mismas características estocásticas en el tiempo, entonces las decisiones óptimas en cada momento serán iguales. Es decir, corresponderán a un mismo portafolio. De esta forma, mientras las cantidades $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ así como la tasa de interés nominal ($i$), sean endógenas, éstas serán no estocásticas en el tiempo. Al considerar un equilibrio con estas características y al combinar las condiciones de equilibrio de saldos reales y acciones, $\theta_1 = (M/P)/W$ y $\theta_3 = S/W$, respectivamente, podemos expresar el nivel de precios actual de la forma:

$$P = \frac{\theta_3}{\theta_1}\frac{M}{K},$$

que es una expresión similar a la que corresponde al caso determinista, dada por $P = M/L$ donde $L$, indica la demanda de saldos reales.

Si se supone que $\theta_1$, $\theta_2$ y $\theta_3$ son constantes y se deriva estocásticamente, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = \frac{\mathrm{d}M}{M} - \frac{\mathrm{d}K}{K} - \left(\frac{\mathrm{d}M}{M}\right)\left(\frac{\mathrm{d}K}{K}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}K}{K}\right)^2.$$

Si se sustituyen las expresiones (3), (21b) y (23), respectivamente, en $dP/P$, $dM/M$ y $dK/K$, se obtiene la expresión:

$$\pi\mathrm{d}t + \mathrm{d}p = \mu\mathrm{d}t + \mathrm{d}x - \left[\nu(1-g) - \frac{C}{K}\right]\mathrm{d}t - \nu(\mathrm{d}y - \mathrm{d}z) + \nu^2(\sigma_y^2 + \sigma_z^2)\mathrm{d}t, \quad (25)$$

donde los componentes determinista y estocástico están dados, respectivamente, por

$$\pi = \mu - \left[\nu(1-g) - \frac{C}{K}\right] + \nu^2(\sigma_y^2 + \sigma_z^2) \quad (25a)$$

y

$$\mathrm{d}p = \mathrm{d}x - \nu(\mathrm{d}y - \mathrm{d}z). \quad (25b)$$

De esta forma, la ecuación (25a) proporciona la tasa de inflación esperada consistente con un portafolio cuya integración es constante en el tiempo. Y, como puede verse, varía proporcionalmente a la tasa esperada de crecimiento monetario, así como a los shocks fiscales y productivos, mientras que con la tasa esperada de crecimiento del capital, crece de manera inversa. Por otra parte, la ecuación (25b) determina el componente estocástico endógeno de la tasa actual de inflación, en función de los componentes estocásticos del crecimiento monetario y de los shocks de productividad y fiscales. Por lo tanto, incrementos estocásticos en la oferta de dinero y en el nivel de gasto gubernamental incrementarán el nivel de precios, mientras que, por otro lado, los incrementos en el nivel de producto lo reducirán.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un modelo de control óptimo estocástico para una economía cerrada con tres sectores. Las variables exógenas incluyen los parámetros de política económica (crecimiento monetario, $\mu$; gasto público, $g$; y política de deuda, $\lambda$) y las tasas de impuesto ($\tau_y$, $\tau_c$ y $\tau_p$). De igual forma, los procesos estocásticos exógenos son los respectivos al crecimiento monetario, $dx$, el gasto público, $dz$, y la producción, $dy$, que se supone que no están correlacionados. El resto de los procesos estocásticos son endógenos y pueden ser expresados como funciones simples de los shocks exógenos: $dp$, $du$, $dv$, y $dw$.

Por otro lado, se discutieron los efectos de política económica sobre la acumulación de capital y la inflación, obteniendo que la relación entre ambas depende de la política empleada. Los resultados obtenidos fueron tres. Primero, la reducción de la incertidumbre económica, $dx$, estimula el crecimiento, al tiempo que reduce la inflación. Segundo, el aumento de la tasa de crecimiento de la oferta monetaria, $\mu$, estimula el crecimiento, pero aumenta también la tasa de inflación. Tercero, vía impuestos se puede elevar la tasa de crecimiento de la economía, al tiempo que se disminuye la inflación.

## Bibliografía


Turnovsky, S. J., (1993). "Macroeconomic Policies, Growth, and Welfare in a Stochastic Economy", Vol. 34, No. 4, pp. 953-981.

Turnovsky, S. J., (1999). "On the Role of Government in a Stochastically Growing Economy". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 23, No. 5-6, pp. 873-908.

Giulano, P. and S. J. Turnovsky (2003). "Intertemporal Substitution, Risk Aversion, and Economic Performance in a Stochastically Growing Economy". *Journal of International Money and Finance*, Vol. 22, No. 4, pp. 529-556.

Turnovsky, S. J. and W. T. Smith (2006). "Equilibrium Consumption and Precautionary Savings in a Stochastically Growing Economy". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 30, No. 2, pp. 243-278.

Venegas-Martínez, F. (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, 1429-1449.

Venegas-Martínez, F. (2005). "Bayesian Inference, Prior Information on Volatility, and Option Pricing: A Maximum Entropy Approach". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 8, No. 1, 1-12.

Venegas-Martínez, F. (2006a). "Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks". *Economic Modelling*, Vol. 23, No. 1, pp. 157-173.

Venegas-Martínez, F. (2006b). "Fiscal Policy in a Stochastic Temporary Stabilization Model: Undiversifiable Devaluation Risk". *Journal of World Economic Review*, Vol. 1. No. 1, pp. 87-106.

Venegas-Martínez, F., (2006c). Riesgos financieros y económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, International Thomson Editors.

Venegas-Martínez, F. (2008). "Temporary Stabilization in Developing Countries and the Real Option of Waiting when Consumption Can Be Delayed". *International Journal of Economic Research*, forthcoming.